Quantum Fysica 2

Olaf Scholten
Kernfysisch Versneller Instituut
NL-9747 AA Groningen

Tentamen, Dinsdag 29 juni, 1999

Opgave 1.

Het electron van een waterstofatoom bevindt zich op $t = 0$ in de toestand

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{5}\left[2\Psi_{100}(\vec{r}) + \sqrt{6}\Psi_{211}(\vec{r}) - 3\Psi_{210}(\vec{r}) + i\sqrt{6}\Psi_{21,-1}(\vec{r})\right] , \tag{1}$$

waar de eigentoestanden $\Psi_{nlm}(\vec{r})$ een energie hebben van $E_{nlm} = c/n^2$.

a. Toon aan dat deze golffunctie genormeerd is.

b. Wat is de verwachtingswaarde van de energie?

c. Wat is de kans om het electron aan te treffen met een energie van $c/4$?

d. Wat is de verwachtingswaarde van L^2?

e. Wat is de kans om $l = 0$ te meten?

f. Wat is de verwachtings waarde van L_z?

g. Is Φ een eigentoestand van L_z?

h. Wat is de verwachtingswaarde van L_x?

Opgave 2.

De Hamiltoniaan voor een deeltje met spin 1/2 is gegeven door

$$H = A\,S_z \; + \; B\,S_x \tag{2}$$

Waarbij $S_i = 1/2\,\hbar\sigma_i$. Voor de constanten A en B geldt dat $A^2 + B^2 = 1$. Op tijdstip $t = 0$ is het deeltje in een eigentoestand van S_y met eigenwaarde $s_y = +\frac{1}{2}\hbar$ ofwel $|\Phi(t=0)>=|\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}>$.

a. Bepaal de eigenwaarden van de H.

b. Bepaal de eigentoestanden van H

c. Ontwikkel de toestand $|\Phi(t = 0)>$ in eigentoestanden van de Hamiltoniaan.

d. Geef de kans dat op tijdstip $t = T$ het deeltje zich bevindt in een toestand met $s_y = -\frac{1}{2}\hbar$

Opgave 3.

Beschouw het geval van twee identieke deeltjes beschreven door

$$H_2(\vec{r}_1;\vec{r}_2) = H_1(\vec{r}_1) + H_1(\vec{r}_2) \tag{3}$$

met

$$H_1(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right] + V(r) \tag{4}$$

waarbij de golffunctie voor één deeltje geschreven is als

$$\Psi^{(1)}(\vec{r}) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{5}$$

en de potentiaal gegeven is door

$$\begin{aligned} V(r) &= 0 \quad \text{voor } r < a \\ V(r) &= \infty \quad \text{voor } r > a \ . \end{aligned}$$

a. Geef de randvoorwaarden bij $r = 0$ en $r = a$.

b. Leid af dat het radiële deel van de golffunctie voldoet aan

$$\frac{d^2u}{d\,r^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2}E_{nl} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)u = 0 \tag{6}$$

voor $u_{nl}(r) = r\,R_{nl}(r)$.

c. Geef, voor het geval dat het deeltje zich in een S-toestand bevindt, de golffunctie en het energiespectrum van H_1 voor radiële excitaties.

d. Geef de laagste 3 excitatieenergieën voor het 2-deeltjesprobleem met de Hamiltoniaan H_2 waarbij beide deeltjes in een S-toestand zitten.
Geef de ontaarding van deze drie toestanden in het spectrum met bijbehorende golffuncties.
N.B. Als je onderdeel c. niet hebt opgelost, noem dan de éénenergieën $E_1^{(1)}$, $E_2^{(1)}$ en $E_3^{(1)}$ met ééndeeltjesgolffuncties $\Psi_1^{(1)}$, $\Psi_2^{(1)}$ en $\Psi_3^{(1)}$.

Opgave 4.

Beschouw de hamiltoniaan $H = H_0 + H_1$, met

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \tag{7}$$

en

$$H_1 = ax^4 , \tag{8}$$

waarbij H_1 als storing opgevat kan worden. De eigenwaarden en eigentoestanden van H_0 zijn $E_n^{(0)} = (n + 1/2)\hbar\omega_0$ en $|n>$ respectievelijk waarbij $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

a. In tweede-orde storingsrekening wordt de energie van de grondtoestand E_0 van H gegeven door

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + E_0^{(2)} \tag{9}$$

Bereken nu $E_0^{(1)}$ en $E_0^{(2)}$.

b. Gebruik nu de variatiemethode om de energie van de grondtoestand te schatten. Gebruik hierbij als variatiegolffunctie de grondtoestand van een harmonische oscillator, $|0>$, met ω als variatieparameter.

= =

Bij de bovenstaande opgaven kunnen de volgende formules voor eigenvectoren in een harmonische-oscillator potentiaal nuttig zijn.

= =

Sigma (spin) matrices.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\sigma_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{3}$$

Harmonic oscillator wave functions.

Solutions for a harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{\omega^2 m}{2} x^2$

$$u_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(y) e^{-y^2/2} \tag{4}$$

with $y = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$, where the Hermiet polynomials for $n \leq 4$ are given as

$$H_0(y) = 1 \tag{5}$$
$$H_1(y) = 2y \tag{6}$$
$$H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{7}$$
$$H_3(y) = 8y^2 - 12y \tag{8}$$
$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12 \tag{9}$$

Matrix elements:

$$
\begin{aligned}
< n|x^2|n > &= < n|p^2|n > /(m\omega)^2 = (2n+1)\,\frac{\hbar}{2m\omega} && (10)\\
< n|x^2|n-2 > &= -< n|p^2|n-2 > /(m\omega)^2 = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{\hbar}{2m\omega} && (11)\\
< n|x^4|n > &= [2(n+1)(n+2)+(2n-1)(2n+1)]\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (12)\\
< n|x^4|n-2 > &= 2(2n-1)\sqrt{n(n-1)}\,\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (13)\\
< n|x^4|n-4 > &= \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (14)
\end{aligned}
$$

Hydrogen wave functions.

$R_{nl}(r)$ are hydrogen-like wave functions with $a_0 = \frac{\hbar}{\mu c\alpha}$ and $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

$$
\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\;, && (15)\\
R_{20}(r) &= 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}\;, && (16)\\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}\, e^{-Zr/2a_0}\;. && (17)
\end{aligned}
$$

Spherical harmonics $Y_{l,m}$.

$$
Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\;;Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,e^{i\phi}\sin\theta\;\;;Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\;. \qquad (18)
$$

with $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}$, and the normalization condition:

$$
\int d\Omega\, Y^*_{l,m}(\Omega)Y_{l',m'}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l,m}(\Omega)Y_{l',m'}(\Omega) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}\;. \qquad (19)
$$

$$
\begin{aligned}
|l,j,m_j> &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+ > + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_- > \quad \text{for } j = l+1/2 && (20)\\
|l,j,m_j> &= \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+ > - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_- > \quad \text{for } j = l+1/2 && (21)
\end{aligned}
$$

with $m = m_j - 1/2$. In addition:

$\hbar$

$L_+ = L_x + iL_y$ met $L_+\, Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\; Y_{l,m+1}$,

$L_- = L_x - iL_y$ met $L_-\, Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\; Y_{l,m-1}$.

$\hbar$